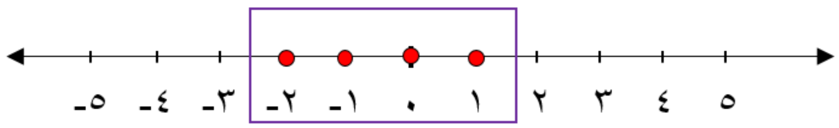
به نام خدا

فصل دوم : عددهای حقیقی

درس اول : عددهای گویا

سوال : هر کدام از مجموعه های زیر را با نماد ریاضی و نمایش عضوها بنویسید و سپس روی محور نمایش دهید.

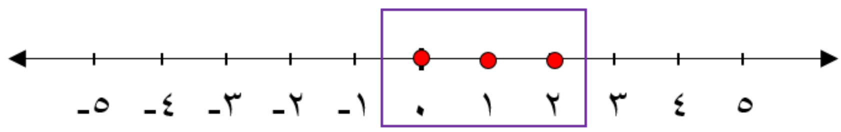
الف) A : اعداد صحیح بین ۳- و۲



$A=\{x \mid x\in\mathbb{Z}\ \text{و}\ -۳<x<۲\}$

$A=\{-۲\ \text{و}\ -۱\ \text{و}\ ۰\ \text{و}\ ۱\}$

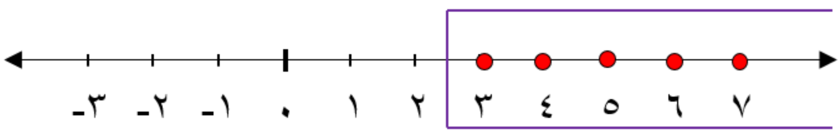
ب) B : اعداد حسابی کوچکتر از ۳



$B=\{x \mid x\in\mathbb{W}\ \text{و}\ x<۳\}$

$B=\{۰\ \text{و}\ ۱\ \text{و}\ ۲\}$

ج) C : اعداد طبیعی بزرگتر یا مساوی ۳



$C=\{x \mid x\in\mathbb{N}\ \text{و}\ x\geq ۳\}$

$C=\{۳\ \text{و}\ ۴\ \text{و}\ ۵\ \text{و}\ ...\}$

سوال : الف) مجموعه ی اعداد گویای بین ۳- و ۲ چند عضو دارد ؟ بی شمار

ب) آیا می توان این مجموعه را با نوشتن عضوهایش نمایش داد؟

خیر چون مجموعه ی اعداد گویا بی شمار عضو دارد و عدد بعد از هر عدد گویا مشخص نیست.

ج)آیا می توان این مجموعه را روی محور نمایش داد؟ خیر

مجموعه اعداد گویا :

هر عددی را که بتوان به صورت یک کسر نوشت به طوری که صورت و مخرج آن عدد صحیح باشد و مخرج مخالف صفر،عدد گویا می نامند.مجموعه ی اعداد گویا را با $\mathbb{Q}$ نمایش می دهند.

نکته : همه ی عدد های طبیعی،صحیح و رادیکالی با جذر دقیق،عضو مجموعه ی عددهای گویا هستند.یعنی

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$$

نکته : چون مجموعه ی اعداد گویا بی شمار عضو دارد و عدد بعد از هر عدد گویا مشخص نیست بنابراین مجموعه ی اعداد گویا را فقط با نماد ریاضی نمایش می دهیم $\mathbb{Q} = \{ \frac{a}{b} \mid a,b \in \mathbb{Z} \,,\, b \neq ۰ \}$

نکته : بین هر دو عدد گویا،بی شمار عدد گویا وجود دارد.

تذکر : اعداد گویا را نمی توان با نوشتن اعضا مشخص کرد؛ زیرا بین هر دو عضو دلخواه می توان بی شمار عضو(کسر)دیگر در نظر گرفت.(دقت: بین دو عدد طبیعی متوالی یا دو عدد صحیح متوالی نمی توان عضو دیگری را نوشت،پس مجموعه اعداد طبیعی و صحیح را می توان با نوشتن اعضا مشخص کرد.)

پیدا کردن یک یا چند عدد گویا بین دو عدد گویا :

الف) هم مخرج کردن: در این روش ابتدا صورت و مخرج هر یک از کسرها را در اعداد مناسبی ضرب می کنیم تا مخرج هر دو کسر یکسان شود،سپس کسری که مخرج آن با مخرج دو کسر یکسان بوده و صورت آن عددی بین دو صورت کسر باشد،جواب مسئله است.

مثال : سه کسر بین $\frac{۱}{۶}$ و $\frac{۵}{۸}$ بنویسید.

$\frac{۱\times۴}{۶\times۴} = \frac{۴}{۲۴}$ و $\frac{۵\times۳}{۸\times۳} = \frac{۱۵}{۲۴}$ $\Rightarrow$ $\frac{۴}{۲۴} < \frac{۵}{۲۴} < \frac{۶}{۲۴} < \frac{۷}{۲۴} < \frac{۱۵}{۲۴}$

مثال : دو کسر بین $-\frac{۳}{۸}$ و $-\frac{۳}{۹}$ بنویسید.

$-\frac{۳\times۹}{۸\times۹} = -\frac{۲۷}{۷۲}$ و $-\frac{۳\times۸}{۹\times۸} = -\frac{۲۴}{۷۲}$ $\Rightarrow$ $-\frac{۲۷}{۷۲} < -\frac{۲۶}{۷۲} < -\frac{۲۵}{۷۲} < -\frac{۲۴}{۷۲}$

☆ هرگاه بعد از هم مخرج کردن کسرها،بین عددهای صورت،هیچ عدد طبیعی وجود نداشت،صورت و مخرج کسرها را در یک واحد بیش تر از تعداد کسرهای خواسته شده ضرب می کنیم.(با این کار مخرج مشترک بزرگتری در نظر گرفته می شود.)

مثال : بین دو کسر $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۴}{۵}$ پنج کسر بنویسید.

به کمک ک.م.م دو کسر را هم مخرج می کنیم.

$$\frac{۴\times۴}{۵\times۴}=\frac{۱۶}{۲۰} \quad \text{و} \quad \frac{۳\times۵}{۴\times۵}=\frac{۱۵}{۲۰}$$

چون می خواهیم بین دو کسر،پنج کسر بنویسیم،صورت و مخرج دو کسر را در ۶ (۶=۵+۱)ضرب می کنیم

$$\frac{۱۶\times۶}{۲۰\times۶}=\frac{۹۶}{۱۲۰} \quad \text{و} \quad \frac{۱۵\times۶}{۲۰\times۶}=\frac{۹۰}{۱۲۰}$$

$$\frac{۹۰}{۱۲۰}<\frac{۹۱}{۱۲۰}<\frac{۹۲}{۱۲۰}<\frac{۹۳}{۱۲۰}<\frac{۹۴}{۱۲۰}<\frac{۹۵}{۱۲۰}<\frac{۹۶}{۱۲۰}$$

ب) میانگین گرفتن : می دانیم که میانگین دو عدد،همواره بین دو عدد قرار دارد و از دو عدد به یک فاصله است. دو کسر را با هم جمع کرده و حاصل را بر ۲ تقسیم می کنیم.برای به دست آوردن تعداد بیشتری کسر،این کار را با کسرهای جدید ادامه می دهیم.

مثال: بین $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۱}{۴}$ دو کسر بنویسید.

میانگین دو کسر را حساب می کنیم.

$$\frac{\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۴}}{۲}=\frac{\frac{۸}{۱۲}+\frac{۳}{۱۲}}{۲}=\frac{\frac{۱۱}{۱۲}}{۲}=\frac{۱۱}{۲۴}$$

برای کسر بعدی میانگین $\frac{۱۱}{۲۴}$ را با یکی از دو کسر $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۱}{۴}$ به همین روش به دست می آوریم.

$$\frac{\frac{۱}{۴}+\frac{۱۱}{۲۴}}{۲}=\frac{\frac{۶}{۲۴}+\frac{۱۱}{۲۴}}{۲}=\frac{\frac{۱۷}{۲۴}}{۲}=\frac{۱۷}{۴۸}$$

$$\frac{۱}{۴}<\frac{۱۷}{۴۸}<\frac{۱۱}{۲۴}<\frac{۲}{۳}$$

ج) جمع صورت ها با هم،مخرج ها با هم : اگر صورت ها را با هم و مخرجها را با هم جمع کنیم،کسر به دست

آمده بین دو کسر داده شده خواهد بود.

مثال : بین دو کسر $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۴}{۵}$ سه کسر بنویسید.

$$\frac{۲}{۳} < \frac{۲+۴}{۳+۵} < \frac{۴}{۵} \Rightarrow \frac{۲}{۳} < \frac{۶}{۸} < \frac{۴}{۵}$$

$$\frac{۲}{۳} < \frac{۲+۶}{۳+۸} < \frac{۶+۴}{۸+۵} < \frac{۴}{۵} \Rightarrow \frac{۲}{۳} < \frac{۸}{۱۱} < \frac{۱۰}{۱۳} < \frac{۴}{۵}$$

نمایش اعشاری اعداد گویا

برای محاسبه کسر $\frac{۳}{۴}$ اگر عدد ۳ را بر ۴ تقسیم کنیم،حاصل ۰/۷۵ می شود ولی برای محاسبه $\frac{۷}{۳}$ ،اگر ۷ را بر ۳ تقسیم کنیم،حاصل ...۲/۳۳۳۳۳ می شود،یعنی هر عدد گویا معادل یک عدد اعشاری است.

مثال :

$$۲۱ = ۲۱/۰$$

$$\frac{۲}{۳} = ۰/۶۶۶۶۶...$$

$$\frac{۸}{۱۵} = ۰/۵۳۳۳۳۳...$$

$$\frac{۱}{۲} = ۰/۵$$

$$\frac{۸}{۵۰} = ۰/۱۶$$

$$\frac{۳}{۸} = ۰/۳۷۵$$

نماد اعشاری کسرها به دو دسته تقسیم می شوند:

۱)نماد اعشاری تحقیقی(مختوم یا متناهی)

کسرهایی که در تقسیم صورت بر مخرج به باقی مانده صفر می رسند،یعنی عمل تقسیم پس از چند مرحله متوقف می شود و تعداد رقم های بعد از اعشار متناهی است.

مثال :

$$\frac{۱}{۸} = ۰/۱۲۵$$

قسمت اعشاری کسر $\frac{۱}{۸}$ بعد از رقم ۵ تمام می شود .

نکته: برای تشخیص مختوم بودن عدد اعشاری بدون عمل تقسیم ،قبل از بررسی کسر باید مطمئن شویم که صورت و مخرج کسر تا جایی که ممکن است ساده شده اند.

کسرهایی که در تجزیه مخرج آنها فقط عامل های ۲یا ۵ باشد،به اعداد اعشاری مختوم تبدیل می شود.

مانند: $\frac{۷}{۲۰} = ۰/۳۵$ $\frac{۵}{۱۶} = ۰/۳۱۲۵$ $\frac{۳}{۲۵} = ۰/۱۲$

۲)نماد اعشاری متناوب

کسری که در تقسیم صورت بر مخرج،هیچ گاه باقی مانده صفر نمی شود و قسمت اعشاری آن انتها ندارد.

در قسمت اعشاری این اعداد یک یا چند رقم به طور متناوب(پشت سر هم)تکرار می شوند.

مثال : $\frac{۵}{۳} = ۱/۶۶۶۶۶... = ۱/\overline{۶}$ عدد ۶ به طور متناوب تکرار شده و تمام نمی شود.

$\frac{۸}{۱۱} = ۰/۷۲۷۲۷۲... = ۰/\overline{۷۲}$ عدد۷۲ به طور متناوب تکرار شده و تمام نمی شود.

$\frac{۸}{۱۵} = ۰/۵۳۳۳۳۳... = ۰/۵\overline{۳}$ عدد۵ثابت و عدد ۳ به طور متناوب تکرار شده و تمام نمی شود.

تذکر: به قسمت تکرار شونده دوره گردش یا دوره تناوب گفته می شود .علامت تکرار(–) روی رقمی قرار می گیرد که به طور متناوب تکرار می شود.

اعداد اعشاری متناوب به دو دسته تقسیم می شوند:

الف)اعداد اعشاری متناوب ساده

اعدادی که در آنها بلافاصله بعد ار ممیز،دوره ی گردش آغاز می شود. مانند : $۱۱/\overline{۲۸}$ و $۳/\overline{۵}$

نکته: برای تشخیص متناوب ساده بودن عدد اعشاری بدون عمل تقسیم ،قبل از بررسی کسر باید مطمئن شویم که صورت و مخرج کسر تا جایی که ممکن است ساده شده اند.

کسری که در تجزیه مخرج آن عامل های اول ۲یا۵ وجود نداشته باشد وحداقل یکی از اعداد اول دیگر مانند ۳ , ۷ , ۱۱ و... وجود داشته باشد، نماد اعشاری کسر متناوب ساده است.

مانند : $\frac{۵}{۳}=۱/\overline{۶}$ $\frac{۸}{۱۱}=۰/\overline{۷۲}$

ب)اعداد اعشاری متناوب مرکب

اعدادی که در آنها دوره ی گردش،بلافاصله بعد از ممیز نیست و یک یا چند رقم غیر تکراری بعد از ممیز وجود دارد. مانند: $۷/۱۳۳۳... = ۷/۱\overline{۳}$ $۰/۸۲۵۲۵۲۵... = ۰/۸\overline{۲۵}$

نکته : برای تشخیص متناوب مرکب بودن عدد اعشاری بدون عمل تقسیم ، قبل از بررسی کسر باید مطمئن شویم که صورت و مخرج کسر تا جایی که ممکن است ساده شده اند.

کسری که در تجزیه مخرج آن هم عامل های ۲یا ۵ و هم حداقل یکی از اعداد اول دیگر مانند ۳ , ۷ , ۱۱ و... وجود داشته باشد،نماد اعشاری آن متناوب مرکب است.

مانند: $\frac{۸}{۱۵}=۰/۵\overline{۳}$ $\frac{۷}{۶}=۰/۱\overline{۶}$

تبدیل اعداد اعشاری به کسر:

الف)عدداعشاری مختوم : تبدیل آن به کسر بسیار ساده است ،کافی است همانطور که عدد خوانده می شود آن را به صورت کسر بنویسیم.مانند:

$۲/۰۱۴ = ۲\frac{۱۴}{۱۰۰۰} = \frac{۲۰۱۴}{۱۰۰۰}$ $۰/۲۴ = \frac{۲۴}{۱۰۰}$ $۰/۶ = \frac{۶}{۱۰}$

ب)عدد اعشاری متناوب:

حالت اول: اگر بعد از ممیز،دوره گردش شروع شود،از رابطه زیر استفاده می شود :

$$\frac{\text{عدد زیر دوره ی گردش}}{\text{به تعداد ارقام دوره ی گردش عدد ۹ را می نویسیم}} + \text{قسمت صحیح} = \text{کسر متناظر با عدد اعشاری}$$

مثال : $۳/\overline{۴} = ۳ + \frac{۴}{۹} = \frac{۳۱}{۹}$ $\qquad$ $۰/\overline{۴۵} = ۰ + \frac{۴۵}{۹۹} = \frac{۴۵}{۹۹} = \frac{۵}{۱۱}$ $\qquad$ $۰/\overline{۷} = ۰ + \frac{۷}{۹} = \frac{۷}{۹}$

حالت دوم : اگر بعد از ممیز دوره ی غیر گردش داشته باشیم و سپس دوره ی گردش آن شروع شود،

از رابطه زیر استفاده می شود :

$$\text{کسر متناظر با عدد اعشاری} = \text{قسمت صحیح} + \frac{\text{عدد غیر گردش} - \text{عدد دوره ی گردش و غیر گردش}}{\text{به تعداد دوره ی گردش عدد ۹ و سپس به تعداد ارقام غیر گردش عدد صفر می نویسیم}}$$

مثال : $۴/۲\overline{۷} = ۴ + \frac{۲۷-۲}{۹۰} = ۴ + \frac{۲۵}{۹۰} = \frac{۳۸۵}{۹۰} = \frac{۷۷}{۱۸}$ $\qquad$ $۰/۸\overline{۳} = \frac{۸۳-۸}{۹۰} = \frac{۷۵}{۹۰} = \frac{۵}{۶}$

درس دوم : عددهای حقیقی

اگر به عددهای اعشاری کسرهای زیر دقت کنید

$\frac{۸}{۱۵} = ۰/۵۳۳۳۳۳... = ۰/۵\overline{۳}$ و $\frac{۸}{۱۱} = ۰/۷۲۷۲۷۲... = ۰/\overline{۷۲}$

تعداد رقم های اعشاری هر یک از عددهای بالا نامتناهی(بی پایان) اما دارای تناوب یا تکرار و نظم خاصی می باشد،این اعداد، گویا نامیده می شوند.

تعداد رقم های اعشاری هر یک از عددهای $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۵}$ و π نامتناهی بوده ولی تناوب یا تکرار و نظم خاصی ندارند.این اعداد، گنگ یا اصم نامیده می شوند.

به طور کلی اگر n مربع کامل نباشد $\sqrt{n}$ گنگ است،یعنی اعدادی که جذر دقیق ندارند،گنگ هستند.

مانند $\sqrt{۷}$ و $\sqrt{۴/۵}$ و $\sqrt{۲۶}$ و $\sqrt{۰/۹}$ و $\sqrt{۱۵}$ (عددهای ۱و۴و۹و۱۶و... مربع کامل هستند.)

نکته : عدد π چون دارای دوره تناوب نیست عددی گنگ است. $\qquad$ $\pi = ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹...$

مجموعه ی عددهای گنگ را با Q' یا Q^C نمایش می دهیم.

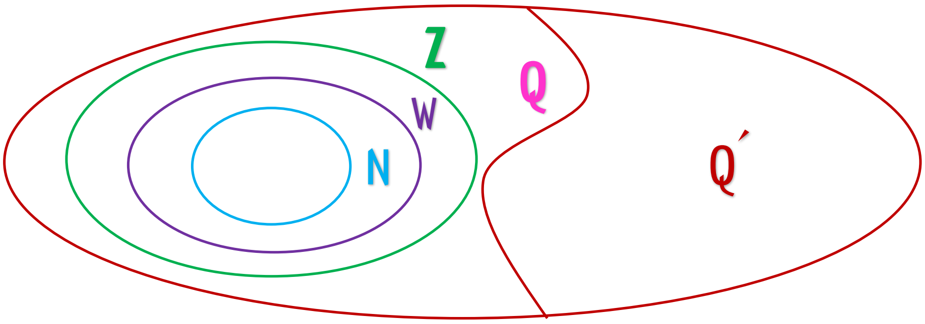
اجتماع مجموعه ی اعداد گویا و اعداد گنگ را مجموعه ی اعداد حقیقی می نامند و با $\mathbb{R}$ نمایش می دهند.

$$Q \cup Q' = \mathbb{R}$$

نکته : مجموعه های اعداد گویا و گنگ دو مجموعه ی جدا از هم هستند،یعنی اشتراک ندارند.به بیان دیگر عددی وجود ندارد که هم گویا و هم گنگ باشد. $Q \cap Q' = \emptyset$

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

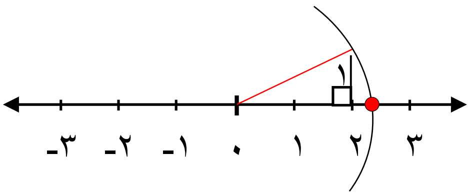
$$Q' \subseteq \mathbb{R}$$



نمایش اعداد رادیکالی روی محور اعداد

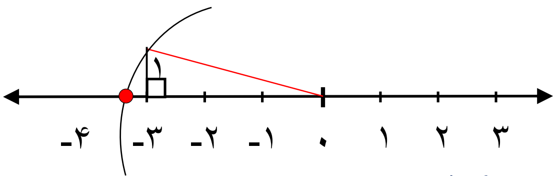
برای نمایش اعداد رادیکالی روی محور اعداد،باید عدد داده شده را به صورت مجموع دو عدد مربع کامل نوشت، سپس با استفاده از رسم مثلث و رابطه فیثاغورس،عدد را روی محور نشان داد.

مثال : برای نشان دادن $\sqrt{۵}$ روی محور اعداد چون $\sqrt{۲^۲ + ۱^۲} = \sqrt{۴ + ۱} = \sqrt{۵}$ پس مثلث قائم الزاویه ای به اضلاع ۲و ۱ رسم می کنیم وبعد کمانی به مرکز صفر و شعاعی به اندازه وتر مثلث می زنیم.محل برخورد کمان با محور(نقطه قرمزرنگ) $\sqrt{۵}$ را نشان می دهد.

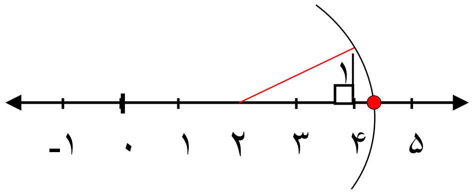


مثال : $-\sqrt{۱۰}$

$\sqrt{۱۰} = \sqrt{۹ + ۱} = \sqrt{۳^۲ + ۱^۲}$



نقطه شروع مبدا مختصات و چون $\sqrt{۱۰}$ منفی است به سمت چپ کمان می زنیم.

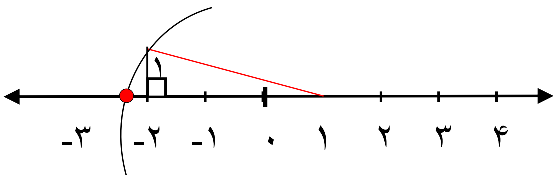


مثال : $۲+\sqrt{۵}$

نقطه شروع ۲ و چون $\sqrt{۵}$ مثبت است به سمت راست کمان می زنیم.

مثال : $۱-\sqrt{۱۰}$

نقطه شروع ۱ و چون $\sqrt{۱۰}$ منفی است به سمت چپ کمان می زنیم.



مثال : عدد $\sqrt{۱۲}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

چون۱۲بین دو مربع کامل ۹و۱۶قرار دارد($۹<۱۲<۱۶$)پس $\sqrt{۱۲}$ بین دو عدد ۴= $\sqrt{۱۶}$ و ۳= $\sqrt{۹}$ قرار دارد

$$۹<۱۲<۱۶ \Rightarrow \sqrt{۹}<\sqrt{۱۲}<\sqrt{۱۶} \Rightarrow ۳<\sqrt{۱۲}<۴$$

مثال : $۲+\sqrt{۷}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

$$۴<۷<۹ \Rightarrow \sqrt{۴}<\sqrt{۷}<\sqrt{۹} \Rightarrow ۲<\sqrt{۷}<۳$$

طبق سوال باید $\sqrt{۷}$ را با عدد ۲ جمع کنیم پس دو طرف آن یعنی ۲و۳ را هم با ۲ جمع می کنیم .

$$۲<\sqrt{۷}<۳ \Rightarrow ۲+۲<۲+\sqrt{۷}<۲+۳ \Rightarrow ۴<۲+\sqrt{۷}<۵$$

مثال : بین دو عدد ۲و۳چهار عدد گنگ بنویسید.

ابتدا ۲و۳ را به اعداد رادیکالی تبدیل می کنیم. $\sqrt{۴}=۲$ و $\sqrt{۹}=۳$

$$\sqrt{۴}<.........<.......<.........<......<\sqrt{۹}$$

$$\sqrt{۴}<\sqrt{۵}<\sqrt{۶}<\sqrt{۷}<\sqrt{۸}<\sqrt{۹}$$

می توان عددهایی مانند $\sqrt{۵/۱}$ و $\sqrt{۶/۳}$ و $\sqrt{۷/۴}$ را هم نوشت.این سوال بی شمار جواب دارد.

نکته : بین هر دو عدد گویا بی شمار عدد گنگ وجود دارد.

مثال : بین دو عدد $\sqrt{۱۰}$ و $\sqrt{۷}$ چهار عدد گنگ بنویسید.

$$\sqrt{۷} < \sqrt{۸/۱} < \sqrt{۸/۷} < \sqrt{۹/۲} < \sqrt{۹/۳} < \sqrt{۱۰}$$

در اینجا $\sqrt{۹}$ را نباید نوشت چون $\sqrt{۹} = ۳$ و عددی گویاست.

نکته : بین دو عدد گنگ ، بی شمار عدد گنگ وجود دارد.

نکته : بین یک عدد گویا و یک عدد گنگ بی شمار عدد گویا و بی شمار عدد گنگ وجود دارد.

نکته : مجموع،تفاضل و حاصل ضرب دو عدد گویا،عددی گویاست.

نکته : خارج قسمت دو عدد گویا،به شرط آن که مخرج یا مقسوم علیه صفر نباشد،عددی گویاست.

نکته : اگر مخرج یک کسر صفر باشد، حاصل آن بی معنی است و عدد حقیقی نمی باشد. مانند : $\frac{۳}{۰} \notin \mathbb{R}$

نکته : مجموع و تفاضل یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

مثال : عدد گنگ $\leftarrow \sqrt{۵}$ عدد گویا $\leftarrow ۴$

عدد گنگ $\leftarrow ۴ + \sqrt{۵}$ عدد گنگ $\leftarrow ۴ - \sqrt{۵}$ عدد گنگ $\leftarrow \sqrt{۵} - ۴$

نکته : حاصل ضرب عدد گویای غیر از صفر در هر عدد گنگ، عددی گنگ است.

مثال : الف) عدد گویا $\leftarrow ۴$ و عدد گنگ $\leftarrow \sqrt{۵}$ $\Rightarrow$ عدد گنگ $\leftarrow ۴\sqrt{۵}$

ب) عدد گویا $\leftarrow ۰$ و عدد گنگ $\leftarrow \sqrt{۵}$ $\Rightarrow$ عدد گویا $\leftarrow ۰ \times \sqrt{۵} = ۰$

نکته : خارج قسمت تقسیم عدد گنگ و عدد گویای غیر از صفر بر هم عددی گنگ است.

مثال : الف) عدد گویا $\leftarrow ۴$ و عدد گنگ $\leftarrow \sqrt{۵}$ $\Rightarrow$ هر دو عدد گنگ $\leftarrow \frac{۴}{\sqrt{۵}}$ و $\frac{\sqrt{۵}}{۴}$

ب) عدد گویا $\leftarrow ۰$ و عدد گنگ $\leftarrow \sqrt{۵}$ $\Rightarrow$ عدد گویا $\leftarrow \frac{۰}{\sqrt{۵}} = ۰$ و تعریف نشده $\leftarrow \frac{\sqrt{۵}}{۰} = ۰$

نکته : مجموع و تفاضل دو عدد گنگ، ممکن است گنگ یا گویا باشد.

مثال :

الف) $\sqrt{۲} \rightarrow$ عدد گنگ و $\sqrt{۳} \rightarrow$ عدد گنگ $\Rightarrow$ $\sqrt{۲}+\sqrt{۳} \rightarrow$ عدد گنگ و $\sqrt{۲}-\sqrt{۳} \rightarrow$ عدد گنگ

ب) $\sqrt{۲} \rightarrow$ عدد گنگ و $۴-\sqrt{۲} \rightarrow$ عدد گنگ $\Rightarrow$ $\cancel{\sqrt{۲}}+۴-\cancel{\sqrt{۲}}=۴ \rightarrow$ عدد گویا

نکته : حاصل ضرب و تقسیم دو عدد گنگ، ممکن است گنگ یا گویا باشد.

مثال :

الف) $\sqrt{۲} \rightarrow$ عدد گنگ و $\sqrt{۳} \rightarrow$ عدد گنگ $\Rightarrow$ $\sqrt{۲}\times\sqrt{۳}=\sqrt{۶} \rightarrow$ عدد گنگ و $\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}=\sqrt{\frac{۲}{۳}} \rightarrow$ عدد گنگ

ب) $\sqrt{۸} \rightarrow$ عدد گنگ و $\sqrt{۲} \rightarrow$ عدد گنگ $\Rightarrow$ $\sqrt{۸}\times\sqrt{۲}=\sqrt{۱۶}=۴ \rightarrow$ عدد گویا

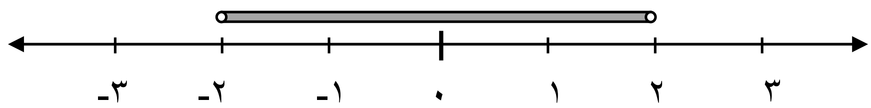
پ) $\sqrt{۸} \rightarrow$ عدد گنگ و $\sqrt{۲} \rightarrow$ عدد گنگ $\Rightarrow$ $\frac{\sqrt{۸}}{\sqrt{۲}}=\sqrt{\frac{۸}{۲}}=\sqrt{۴}=۲ \rightarrow$ عدد گویا

نمایش اعداد حقیقی روی محور:

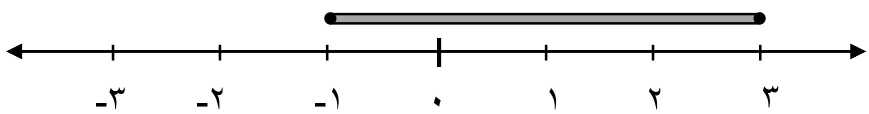
همه ی اعداد حقیقی را می توان روی محور نشان داد.هر نقطه روی محور اعداد حقیقی نشان دهنده ی یک عدد گویا یا یک عدد گنگ است.

مثال : مجموعه های زیر را روی محور اعداد نشان دهید.

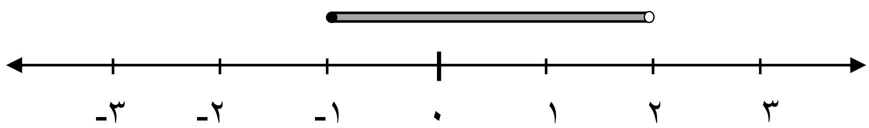
$A=\{x\in\mathbb{R} \mid -۲<x<۲\}$



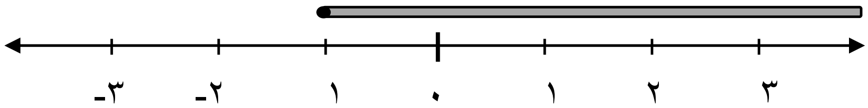
$B=\{x\in\mathbb{R} \mid -۱\le x\le ۳\}$



$C=\{x\in\mathbb{R} \mid -۱\le x<۲\}$

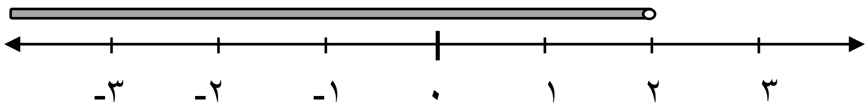


$D=\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq -۱\}$



$x\geq -۱$ خوانده میشه x های بزرگتر مساوی ۱- و از ۱- به سمت راست محور مشخص می کنیم.

$E=\{x\in\mathbb{R} \mid x<۲\}$



تذکر: در علامت $\leq$ (کوچکتر مساوی) و $\geq$ (بزرگتر مساوی) علامت مساوی یعنی خود عدد هم عضو مجموعه هست و آنها را روی محور با دایره های توپر نشان می دهیم.

ولی در علامت های $<$ یا $>$ ،نقاط ابتدایی یا انتهایی عضو مجموعه نیستند و آنها را روی محور با دایره های توخالی نشان می دهیم.

نکته : روی محور اعداد حقیقی بین هر دو عدد حقیقی، بی شمار عدد گویا و گنگ وجود دارد .

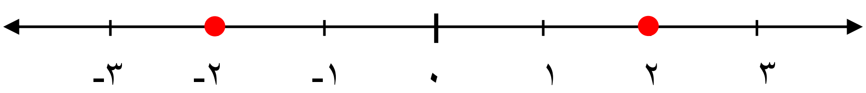
درس سوم : قدر مطلق و محاسبه تقریبی

فاصله ی یک نقطه روی محور تا مبدا همواره عددی مثبت است،صرف نظر از اینکه نقطه در قسمت مثبت یا منفی محور باشد.

فاصله ی نقطه نظیر یک عدد حقیقی روی محور تا مبدا (صفر) را قدر مطلق آن عدد می نامیم.قدر مطلق عدد a را با $|a|$ نشان می دهیم.

مثال : فاصله نقاط نظیر دو عدد ۲ و ۲- تا مبدا ، برابر ۲ است پس قدر مطلق هر دو عدد ۲و ۲- برابر ۲ است.

یعنی $|۲| = |-۲| = ۲$



نکته : قدر مطلق عدد صفر برابر صفر است و قدر مطلق عددهای مثبت، برابر خود آن عدد است و قدر مطلق عددهای منفی، قرینه ی آن عدد است.

$$|a| = \begin{cases} a & a > ۰ \\ ۰ & a = ۰ \\ -a & a < ۰ \end{cases}$$

مثال : $|-۷| = -(-۷) = ۷$ $\qquad$ $\left|\frac{۲}{۵}\right| = \frac{۲}{۵}$

مثال : $|-۲۱ \div ۷ - ۱| = |-۳-۱| = |-۴| = -(-۴) = ۴$

نکته : قدر مطلق حاصل ضرب دو عدد، مساوی با حاصل ضرب قدر مطلق آنهاست.

یعنی برای هر دو عدد حقیقی دلخواه a و b داریم : $|a \times b| = |a| \times |b|$

مثال :

$$\left.\begin{array}{l} |(-۴)\times(+۳)| = |-۱۲| = ۱۲ \\ |-۴| \times |+۳| = ۴ \times ۳ = ۱۲ \end{array}\right\} \Rightarrow |(-۴)\times(+۳)| = |-۴| \times |+۳|$$

نکته : قدر مطلق تقسیم دو عدد، برابر حاصل تقسیم قدر مطلق آنهاست.

یعنی برای هر دو عدد حقیقی دلخواه a و b $(b \neq ۰)$ داریم : $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

مثال :

$$\left.\begin{array}{l} \left|\frac{۱۲}{-۶}\right| = |-۲| = ۲ \\ \frac{|۱۲|}{|-۶|} = \frac{۱۲}{۶} = ۲ \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\frac{۱۲}{-۶}\right| = \frac{|۱۲|}{|-۶|}$$

نکته : قدر مطلق مجموع دو عدد، از مجموع قدر مطلق آن دو عدد، کوچکتر یا مساوی است.

یعنی برای هر دو عدد حقیقی دلخواه a و b داریم : $|a+b| \leq |a| + |b|$

مثال :

$$\left.\begin{array}{l} |-۹+۶| = |-۳| = ۳ \\ |-۹| + |۶| = ۹ + ۶ = ۱۵ \end{array}\right\} \Rightarrow |-۹+۶| \leq |-۹| + |۶|$$

سؤال : حاصل عبارت های زیر را بدون قدر مطلق بنویسید.

$|۲-\sqrt{۵}|$

می دانیم ۲= $\sqrt{۴}$ و چون ۵ > ۴ پس $\sqrt{۵} > \sqrt{۴}$ بنابراین حاصل عبارت داخل قدر مطلق منفی است .پس برای محاسبه قدر مطلق باید عبارت درون آن را قرینه کنیم.

$\underbrace{|۲-\sqrt{۵}|}_{\text{منفی}} = -(۲-\sqrt{۵}) = -۲+\sqrt{۵} = \sqrt{۵}-۲$

$|۶-۵\sqrt{۲}|$

می دانیم $\sqrt{۵۰} = \sqrt{۲۵ \times ۲} = ۵\sqrt{۲}$ و $۶ = \sqrt{۳۶}$.چون ۵۰ > ۳۶ بنابراین حاصل عبارت $\sqrt{۳۶} - \sqrt{۵۰}$منفی است.یعنی حاصل عبارت داخل قدر مطلق منفی است و برای محاسبه ی آن باید عبارت را قرینه کنیم.

$\underbrace{|۶-۵\sqrt{۲}|}_{\text{منفی}} = -(۶-۵\sqrt{۲}) = -۶+۵\sqrt{۲} = ۵\sqrt{۲}-۶$

$\overbrace{|۳-\sqrt{۲}|}^{\text{مثبت}} - \overbrace{|\sqrt{۲}-۴|}^{\text{منفی}} = ۳-\sqrt{۲}-(-\sqrt{۲}+۴) = ۳-\cancel{\sqrt{۲}}+\cancel{\sqrt{۲}}-۴ = -۱$

$۳ = \sqrt{۹} > \sqrt{۲} \qquad \sqrt{۲} < \sqrt{۱۶}$

تذکر:

۱-عدد a مثبت باشد یعنی $a > ۰$

۲- عدد a منفی باشد یعنی $a < ۰$

۳- عدد a نامنفی باشد یعنی $a \geq ۰$

۴- عدد a نامثبت باشد یعنی $a \leq ۰$

سؤال : اگر a مثبت و b منفی باشد،حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

چون a مثبت و b منفی است، حاصل $a-b$ مثبت است و حاصل $b-a$ منفی است.

$|a|+|b|-|a-b| = a+(-b)-(a-b) = a-b-a+b = ۰$

$|b-a|-|a|-|b| = -(b-a)-a-(-b) = -b+a-a+b = ۰$

سؤال : حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

$\sqrt{(-۴)^۲} = \sqrt{۱۶} = ۴$ $\qquad$ $\sqrt{۴^۲} = \sqrt{۱۶} = ۴$

نکته : جذر توان دوم هر عدد با قدر مطلق آن عدد برابر است. یعنی $\sqrt{a^۲} = |\,a\,|$

سؤال : حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

$\sqrt{(-۶)^۲} = |\,-۶\,| = ۶$ $\qquad$ $\sqrt{۱۳۹۹^۲} = |\,۱۳۹۹\,| = ۱۳۹۹$

$$\sqrt{(۱-\sqrt{۲})^۲} = |\,\underbrace{۱-\sqrt{۲}}_{\text{منفی}}\,| = -(۱-\sqrt{۲}) = -۱+\sqrt{۲} = \sqrt{۲}-۱$$

نکته : مجموع هر عدد حقیقی و قدرمطلق آن، همواره بزرگتر یا مساوی با صفر است.

$a + |\,a\,| \geq ۰$

مثال : $a = ۲ \rightarrow a + |\,a\,| = ۲ + |\,۲\,| = ۴ > ۰$

$a = -۴ \rightarrow a + |\,a\,| = -۴ + |\,-۴\,| = ۰$

نکته : اگر $۰ < a < ۱$ باشد داریم : $\qquad a > a^۲ > a^۳ > a^۴ > \dots$

مثال : اگر $a = ۰/۵$ داریم : $\qquad (۰/۵) > (۰/۵)^۲ > (۰/۵)^۳$

افلاطون: "ریاضیات روح را صفا می بخشد و ذهن را برای درک حقیقت آماده می کند."

غفلت از ریاضیات به تمام علوم و دانش ها لطمه می زند.