به نام خدا

فصل اول : مجموعه ها

درس اول : معرفی مجموعه

مجموعه : به دسته یا گروهی از اشیاء،شکلها،اعداد،حروف و ... که کاملا مشخص (معین) و دو به دو متمایز (غیر تکراری) باشند ،مجموعه می گویند.

نکته : به هر یک از اعداد و حروف داخل مجموعه،عضو گفته می شود.

نکته : هر مجموعه را با یکی از حروف بزرگ انگلیسی نام گذاری می کنند و عضوهای آن را داخل آکولاد { } قرار می دهند و بین عضوها " و " یا " ویرگول " می گذارند.

مثال : مجموعه اعداد طبیعی یک رقمی A = { ۱و۲و۳و۴و۵و۶و۷و۸و۹ }

مثال : کدام یک از عبارتهای زیر مشخص کننده یک مجموعه است ؟

الف) ۳عدد زوج متوالی : مجموعه نیست .

چون جواب ها می توانند سلیقه ای انتخاب شوند، بی شمار جواب دارد.

{ ۲و۴و۶ } یا { ۶و۸و۱۰ } یا {۴و۶و۸} یا{ ۱۰ و۱۲و۱۴ } یا { ۲۲و۲۴و۲۶} یا ...

ب) ۴گل زیبا : مجموعه نیست.جواب ها سلیقه ای انتخاب می شوند.

ج) اعداد اول کمتر از ۱۰ : مجموعه هست. A = { ۲و۳و۵و۷ }

نکته : در مجموعه ها، ترتیب نوشتن عضوها مهم نیست،یعنی با جابجایی عضوهای یک مجموعه،مجموعه جدیدی ساخته نمی شود.برای نمونه، مجموعه ی B = { ۳و۵و۷ } را می توان به صورت های زیر نمایش داد:

B={ ۳و۷و۵ } و B={۵و۷و۳ } و B={۵و۳و۷} و B={۷و۳و۵} و B={۷و۵و۳}

نکته : همان طور که در تعریف مجموعه گفته شد،عضوهای مجموعه باید غیر تکراری باشند،پس در مجموعه

عضوهای تکراری فقط یک بار نوشته می شوند.(عضوهای تکراری را حذف می کنیم مجموعه استاندارد می شود)

مثال : مجموعه {۵و۳و۵و۳و۲و۵و۲و۱}دارای ۴ عضو است چون

{۵و۳و۲و۱} = {~~۵~~و~~۳~~و~~۵~~و۳و~~۲~~و۵و۲و۱}

نکته : علامت عضو بودن در یک مجموعه را با نماد $\in$ و علامت عضو نبودن در یک مجموعه را با نماد $\notin$ نشان می دهیم.

مثال : با توجه به مجموعه A درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.　　A = {~~۵~~و~~۳~~و۵و۲و۳و۱}

۵ $\in$ A ✓　　۴ $\in$ A ×　　۷ $\notin$ A ✓　　۴=تعداد عضوهای مجموعه

ابتدا عضوهای تکراری را حذف کرده و مجموعه را استاندارد می کنیم.

نکته : اگر تعداد عضوهای یک مجموعه محدود و قابل شمارش باشد،آن مجموعه را متناهی یا باپایان می گوییم و اگر تعداد عضوهای مجموعه نامحدود و غیر قابل شمارش باشد،آن مجموعه را نامتناهی یا بی پایان می گوییم.

مثال : مجموعه زیر یک مجموعه متناهی یا باپایان است.

مجموعه اعداد طبیعی دو رقمی　　A = {۹۹و ... و ۳و۲و۱}

مثال : مجموعه زیر یک مجموعه نامتناهی یا بی پایان است.

مجموعه اعداد صحیح منفی کوچکتر از ۱۰-　　{ ۱۱- و۱۲- و۱۳- و... }یا { ... و ۱۳- و ۱۲- و ۱۱- }

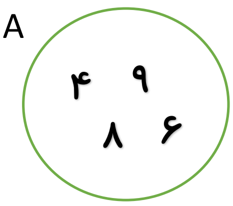
نکته : علامت ... یعنی عضوهای مجموعه به همین صورت ادامه دارند.

نمودار وِن : یکی از روش های نشان دادن مجموعه ها،نمایش هندسی یا نمودار وِن است. در این روش عضوهای مجموعه را داخل یک شکل هندسی قرار می دهیم.

مثال : اگر A مجموعه اعداد مرکب یک رقمی باشد آن را به دو صورت نوشتن اعضا و نمودار ون نمایش دهید.

A ={۹و۸و۶و۴}

A



Motalleb zadeh

مجموعه تهی : مجموعه ای که عضو نداشته باشد،مجموعه تهی نامیده می شود.مجموعه تهی را با نماد { } یا $\emptyset$

نمایش می دهیم.

تذکر : هیچ گاه مجموعه تهی را با نماد {٥} یا {$\emptyset$} نمایش نمی دهیم .

مثال: کدام یک از مجموعه های زیر تهی است ؟

الف) مجموعه اعداد طبیعی کمتر از ۴ × {۱ و ۲ و ۳}

ب) مجموعه اعداد صحیح کمتر از صفر × {۱- و ۲- و ۳- و ...}

ج) مجموعه اعداد طبیعی بین ۴و۵ ✓ { }

نکته : مجموعه ای که فقط یک عضو داشته باشد،مجموعه یک عضوی یا یکانی نامیده می شود.

مثال : مجموعه اعداد زوج اول {۲}

درس دوم : مجموعه های برابر و نمایش مجموعه ها

دو مجموعه برابر : دو مجموعه A و B را برابر می گوییم ،در صورتی که عضوهای دو مجموعه ی A و B یکسان

باشد و هر عضو A عضوی از B و هر عضو B عضوی از A باشد و می نویسیم A=B

☺تعداد عضوهای دو مجموعه برابر،مساوی است.

مثال : مجموعه های A و B با هم برابر هستند.

$$A = \{ ۲ \text{ و } ۷ \text{ و } \frac{۶}{۲} \} \qquad B = \{ ۷ \text{ و } ۳ \text{ و } \sqrt{۴} \}$$

مثال : x و y را طوری تعیین کنید تا دو مجموعه A و B برابر باشند.

$$A = \{ ۷ \text{ و } x+۱ \text{ و } ۲ \} \qquad B = \{ y-۱ \text{ و } ۵ \text{ و } ۷ \}$$

هر دو مجموعه ۳ عضو دارند.عدد۷ عضو هر دو مجموعه است.عدد ۲ باید عضو B و عدد ۵ باید عضو A باشد.

$$x + ۱ = ۵ \Rightarrow x = ۵-۱ = ۴ \Rightarrow x = ۴$$

$$y - ۱ = ۲ \Rightarrow y = ۲+۱ = ۳ \Rightarrow y = ۳$$

نکته : اگر عضوی در A باشد که در B وجود نداشته باشد و یا عضوی در B باشد که در A وجود نداشته باشد،

در این صورت A با B برابر نیست و می نویسیم $A \neq B$

مثال : کدام یک از مجموعه های زیر با مجموعه A برابر است؟

A ={ ۲ و *a* و ۵ و *d* }   B ={ ۲ و *a* و ۵ و *b* }   C ={ ۲و *a* و ۵و ۲ و *a* و ۵ و *d* }   D ={ ۲ و *a* و ۵ }

مجموعه A با B مساوی نیست ،چون *b* در B هست ولی در A نیست ویا *d* در A هست ولی درB نیست پس $A \neq B$

مجموعه های A وC برابرند،چون   C ={ ۲و *a* و ۵و ~~۲~~ و ~~*a*~~ و ~~۵~~ و *d* }= {۲ و *a* و ۵ و *d* }

هر عضو A درC هست و برعکس پس $A= C$

مجموعه ی D با مجموعه ی A برابر نیست چون D دارای ۳ عضو و A دارای ۴ عضو هست، پس $A \neq D$

زیر مجموعه : اگر A و B دو مجموعه باشند بطوریکه هر عضو A عضوی ازB باشد،در این صورت می گوییم

A زیر مجموعه ی B است و می نویسیم $A \subseteq B$

مثال : دو مجموعه A و B را در نظر بگیرید.   B ={ ۲ و ۳ و ۵ و ۷ }   A ={ ۲ و ۳ و ۵ }

هر عضو مجموعه ی A در B هست پس می گوییم A زیر مجموعه ی B هست و می نویسیم $A \subseteq B$

نکته : اگر عضوی در B باشد که درA نباشد می گوییم B زیر مجموعه ی A نیست و می نویسیم $B \nsubseteq A$

در مثال قبل عدد ۷ در مجموعه B هست ولی در A نیست پس $B \nsubseteq A$

نکته : هر مجموعه زیر مجموعه ی خودش است. $A \subseteq A$

نکته : مجموعه ی تهی زیر مجموعه ی همه ی مجموعه هاست . $\emptyset \subseteq A$

نکته : اگر دو مجموعه ی A و B برابر باشند (A=B) در این صورت $B \subseteq A$ و $A \subseteq B$ و بر عکس این مطلب

هم درست است یعنی اگر $B \subseteq A$ و $A \subseteq B$ در این صورت A=B .

$$\left.\begin{array}{l} A \subseteq B \\ B \subseteq A \end{array}\right\} \Leftrightarrow A=B$$

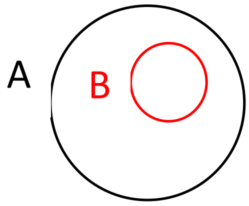
مثال : اگر { ۳ و ۲ } = A و { ۵ و ۳ و ۲ } = B باشد داریم $A \subseteq B$ و اگر { ۷ و ۵ و ۳ و ۲ } = C باشد آن گاه

$B \subseteq C$ است و می توان نتیجه گرفت $A \subseteq C$

نکته : اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ باشد،نتیجه می گیریم $A \subseteq C$ (خاصیت تعدی)

$$\left.\begin{matrix} A \subseteq B \\ B \subseteq C \end{matrix}\right\} \Rightarrow A \subseteq C$$

☺ رابطه $B \subseteq A$ با نمودار وِن



☆ مجموعه ی { {{۳}} و {۲} و ۱ } = A سه عضو دارد که برای نمایش عضویت هر کدام، خود آنها را

با نماد عضویت استفاده می کنیم. {{۳}} $\in A$ {۲} $\in A$ ۱ $\in A$

اما برای نوشتن زیر مجموعه های یک عضوی مجموعه ی A، هر یک از عضوهای مجموعه را داخل علامت

آکولاد قرار می دهیم { {{۳}} } $\subseteq A$ { {۲} } $\subseteq A$ { ۱ } $\subseteq A$

تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه :

مثال : همه ی زیر مجموعه های { ۵ و ۳ } = A را بنویسید.

تهی زیر مجموعه ی هر مجموعه است. $\emptyset \subseteq A$

زیر مجموعه های یک عضوی { ۵ } و { ۳ }

زیر مجموعه های دوعضوی { ۵ و ۳ } که خود مجموعه ی A می باشد.پس مجموعه ی دو عضوی A، ۴

زیر مجموعه دارد. $۴ = ۲ \times ۲ = ۲^{۲}$

مثال : همه ی زیر مجموعه های { ۵ و ۳ و ۲ } = A را بنویسید.

تهی زیر مجموعه ی هر مجموعه است. $\emptyset \subseteq A$

زیر مجموعه های یک عضوی { ۵ } و { ۳ } و {۲}

زیر مجموعه های دوعضوی {۵و۳} و {۲و۵} و {۳و۲}

زیر مجموعه های سه عضوی { ۵ و ۳ و ۲ } که خود مجموعه ی A می باشد.پس مجموعه ی سه عضوی A،

۸زیر مجموعه دارد. $۸ = ۲ \times ۲ \times ۲ = ۲^{۳}$

نکته : تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه nعضوی از رابطه ۲^{n} به دست می آید.(n تعداد عضوهای مجموعه)

مثال : الف)یک مجموعه ی ۵ عضوی ، چند زیر مجموعه دارد ؟ $۲^{۵} = ۳۲$ زیر مجموعه

ب) مجموعه ای دارای ۶۴ زیر مجموعه است.این مجموعه دارای چند عضو است؟

$۶۴ = ۲^{۶} \Rightarrow$ ۶ عضو دارد

نکته : به تمامی زیر مجموعه های هر مجموعه، به جز خودش،زیر مجموعه های محض آن مجموعه می گویند.

تعداد زیر مجموعه های محض یک مجموعه n عضوی برابر است با $۲^{n} - ۱$

مثال : یک مجموعه ۷عضوی چند زیر مجموعه ی محض دارد؟ $۲^{۷} - ۱ = ۱۲۷$

نکته : هر مجموعه به تعداد عضوهایش زیر مجموعه ی تک عضوی دارد،به عبارت دیگر یک مجموعه ی n عضوی n زیر مجموعه ی یک عضوی دارد.

مثال : مجموعه ی $A = \{a,b,c,d,f\}$ چند زیر مجموعه ی دو عضوی دارد؟

فرض کنیم مجموعه ی $B = \{\square,\square\}$ یک زیر مجموعه ی دو عضوی دلخواه از مجموعه یA باشد که دو خانه ی خالی دارد که حتما باید پر شود.

برای پر کردن خانه اول هیچ محدودیتی نداریم و به ۵ حالت ممکن می توانیم آن را پر کنیم.

ولی برای پر کردن خانه دوم نمی توانیم عضوی که در خانه اول قرار دادیم در خانه دوم قرار دهیم،پس برای پرکردن خانه دوم ۴ حالت ممکن می باشد.

در کل می توانیم این دو خانه را به $۵ \times ۴ = ۲۰$ حالت پر کنیم ولی با توجه به اینکه جابجایی اعضاء در مجموعه ها تاثیری ندارد یعنی $\{a,b\} = \{b,a\}$ پس نصف حالت ها حذف می شود.بنابراین تعداد زیر مجموعه های دو

عضوی یک مجموعه ی ۵عضوی برابر است با $\frac{۵\times(۵-۱)}{۲}=\frac{۵\times۴}{۲}=۱۰$

نکته : تعداد زیر مجموعه های دو عضوی یک مجموعه ی n عضوی برابر است با $\frac{n\times(n-۱)}{۲}$

نکته : تعداد زیر مجموعه های سه عضوی یک مجموعه ی n عضوی برابر است با

$$\frac{n\times(n-۱)\times(n-۲)}{۱\times۲\times۳}$$

تعداد کل حالت ها ← صورت کسر

تعداد تکرار هر حالت ← مخرج کسر

نکته : وقتی با سه عضو a و b و c می خواهیم سه خانه ی ممکن را پر کنیم این کار به (!۳ =۶ = ۱ × ۲ × ۳) حالت ممکن است.

نکته : تعداد زیر مجموعه های چهار عضوی یک مجموعه ی n عضوی برابر است با

$$\frac{n\times(n-۱)\times(n-۲)\times(n-۳)}{۱\times۲\times۳\times۴}$$

تعداد کل حالت ها ← صورت کسر

تعداد تکرار هر حالت ← مخرج کسر

نکته : تعداد زیر مجموعه های rعضوی یک مجموعه ی n عضوی از رابطه ی $\frac{n!}{r!\times(n-r)!}$ بدست می آید.

در این رابطه $n! = ۱\times۲\times۳\times...\times n$ می باشد .

مثال : تعداد زیر مجموعه های ۸ عضوی یک مجموعه ی ۱۰ عضوی را بدست آورید.

$$\frac{۱۰!}{۸!\times(۱۰-۸)!}=\frac{۱۰!}{۸!\times۲!}=\frac{\overset{۵}{\cancel{۱۰}}\times۹\times\overset{۱}{\cancel{۸!}}}{\underset{۱}{\cancel{۸!}}\times\underset{۱}{\cancel{۲}}}=۴۵$$

مثال : مجموعه $A=\{a,b,c,d,e\}$ چند زیر مجموعه دارد که شامل a باشد و شامل e نباشد؟

عضو a باید در تمام زیر مجموعه ها باشد، پس فقط یک حالت دارد(بودن)

عضو e در هیچ کدام از زیر مجموعه ها نباشد ،آن هم فقط یک حالت دارد(نبودن)

بقیه ی عضوها هر کدام دو حالت دارند(بودن و نبودن)

عضو ها ← a , b , c , d , e

حالت ها ← $۱\times۲\times۲\times۲\times۱=۲^۳=۸$

☆ برای حل این نمونه سوالات می توان عضوهایی که باید و عضوهایی را که نباید در زیر مجموعه ها باشند را کنار گذاشت و تعداد زیر مجموعه هایی که با عضوهای باقیمانده می توان نوشت را پیدا کرد.

در مثال بالا دو عضو a و e را کنار می گذاریم پس ۳ عضو دیگر باقی می ماند که با این مجموعه ی ۳ عضوی، $۲^۳$ یعنی ۸ زیر مجموعه می توان نوشت.

نمایش مجموعه های اعداد :

الف) مجموعه اعداد طبیعی : $\mathbb{N}$ = { ۱ و ۲ و ۳ و ... }

ب) مجموعه اعداد حسابی : $\mathbb{W}$ = { ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ... }

ج) مجموعه اعداد طبیعی فرد : $\mathbb{O}$ = { ۱ و ۳ و ۵ و ... }

د) مجموعه اعداد طبیعی زوج : $\mathbb{E}$ = { ۲ و ۴ و ۶ و ... }

ه) مجموعه اعداد صحیح : $\mathbb{Z}$ = { ... و ۲- و ۱- و ۰ و ۱ و ۲ و ... }

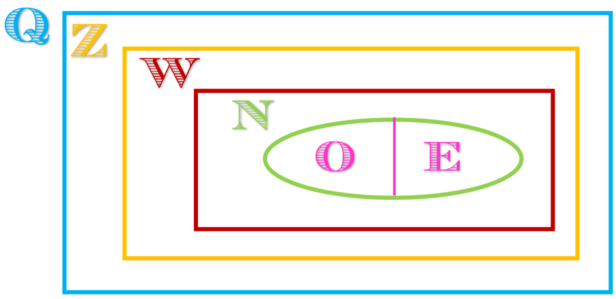
و) مجموعه اعداد گویا : $\mathbb{Q} = \{ \frac{a}{b} \mid a,b \in \mathbb{Z} , b \neq ۰ \}$

☺ هر عدد طبیعی یک عدد حسابی است؛ یعنی $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W}$

☺ همه عددهای طبیعی و حسابی، عضو $\mathbb{Z}$ هستند؛ بنابراین $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z}$

نکته : نمودار وِن مجموعه اعداد ریاضی به صورت زیر است ،

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$



حال با یک مثال روش نمایش مجموعه ها با نمادهای ریاضی را بیان می کنیم؛

مثال : مجموعه {۷و۶و۵و۴} = A را به صورت ریاضی نمایش دهید.

عضوهای مجموعه ی A متعلق به مجموعه ی اعداد طبیعی هستند و از ۳بزرگتر و از ۸ کوچکترند،یعنی

$$A = \{ x \in \mathbb{N} \mid ۳ < x < ۸ \}$$

علامت " | " در نمایش ریاضی مجموعه ها به معنی به طوریکه یا به قسمی که می باشد.

مثال : مجموعه های زیر را با نماد ریاضی نمایش دهید.

الف) مجموعه اعداد زوج طبیعی $E = \{ ۲و۴و۶و... \} = \{ ۲x \mid x \in \mathbb{N} \}$

هر یک از اعداد زوج ، مضربی از ۲ هستند و به صورت $۲x$ نمایش داده می شوند.

ب) مجموعه اعداد فرد طبیعی $O = \{ ۱و۳و۵و... \} = \{ ۲x - ۱ \mid x \in \mathbb{N} \}$

اعداد فرد به صورت $۲x - ۱$ نمایش داده می شوند.

ج) مجموعه مضرب های طبیعی عدد۵

$A = \{۵و۱۰و۱۵و۲۰و...\} = \{ ۵x \mid x \in \mathbb{N} \}$

د) $B = \{۶و۷و۸و۹و۱۰\}$

عضوهای مجموعه متعلق به اعداد طبیعی بوده و از ۱۱کوچکتر و از ۵ بزرگترند.

$B = \{x \in \mathbb{N} \mid ۵ < x < ۱۱ \}$

یا می توان گفت عضوهای مجموعه کوچکتر مساوی ۱۰ $(x \leq ۱۰)$ و بزرگتر مساوی۶ $(۶ \leq x)$ هستند.

یعنی می توان مجموعه را به صورت $\{ x \in \mathbb{N} \mid ۶ \leq x \leq ۱۰ \}$ هم نمایش داد.

ه) $C = \{ -۵و-۶و-۷و... \}$

عضوهای مجموعه متعلق به اعداد صحیح بوده و از عدد ۴- کوچکتر و یا کوچکتر مساوی ۵- هستند.

(مجموعه C نامتناهی است) $C = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x < -۴ \} = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x \leq -۵ \}$

مثال : مجموعه های زیر را به صورت اعضا نمایش دهید.

الف) $A = \{ x \in \mathbb{N} \mid ۴ \leq x < ۹ \}$

عضوهای مجموعه شامل اعداد طبیعی بزرگتر مساوی ۴ و کوچکتر از ۹ می باشد. $A = \{۴و۵و۶و۷و۸\}$

ب) $B = \{ ۲x - ۱ \mid x \in \mathbb{N} , x \leq ۳ \}$

عددهای ۱و۲و۳ را درعبارت $۲x-۱$ به جای x قرار می دهیم $B=\{۲(۱)-۱ و ۲(۲)-۱ و ۲(۳)-۱\}=\{۱و۳و۵\}$

ج) $C=\{x^۲ \mid x\in\mathbb{N}, x\geq ۴\}$

عضوهای مجموعه ،مجذور اعداد بزرگتر یا مساوی ۴ هستند.

$C=\{۴^۲ و ۵^۲ و ۶^۲ و ...\}=\{۱۶ و ۲۵ و ۳۶ و ...\}$

صورت های مختلف نمایش یک مجموعه :

۱)نمایش تفصیلی(نوشتن عضوها) :عضوهای یک مجموعه را داخل آکولاد می نویسیم.

۲)نمایش هندسی(نمودار وِن) : عضوهای یک مجموعه را داخل یک شکل هندسی می نویسیم.

۳)نمایش توصیفی(نوشتن با علائم ریاضی) : با پیدا کردن یک ویژگی مشترک اعضا و نشان دادن آن ویژگی با علائم ریاضی مجموعه را بیان می کنیم.

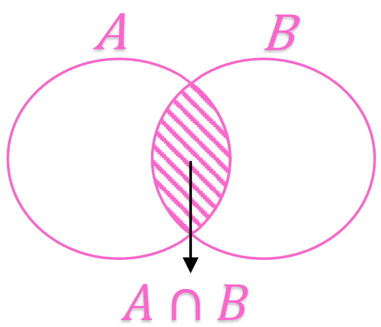
درس سوم : اجتماع و اشتراک و تفاضل مجموعه ها

اشتراک دو مجموعه : به دو مجموعه A و B دقت کنید: $B=\{۴و۵و۶و۷و۹\}$ $A=\{۳و۴و۶و۷و۸\}$

همان طور که مشاهده می کنید سه عدد ۴و۶و۷ عضوهای مشترک دو مجموعه ی AوB هستند.این مطلب را به صورت ریاضی چنین می نویسیم $A\cap B=\{۴و۶و۷\}$ (علامت اشتراک $\cap$)

اشتراک دو مجموعه ی A و B، مجموعه ای است که عضوهای آن هم در A و هم در B باشد.

$$A\cap B=\{x \mid x\in A , x\in B\}$$



نکته : با توجه به تعریف اشتراک دو مجموعه داریم :

۱)اشتراک هر مجموعه با خودش،خود مجموعه می شود . $A\cap A=A$

۲)اشتراک هر مجموعه با مجموعه ی تهی،برابر مجموعه ی تهی است . $A\cap\emptyset=\emptyset$

۳) $A \cap B = B \cap A$ (خاصیت جابجایی)

۴)با توجه به نمودار وِن،همه ی اعضای مجموعه ی $A \cap B$ ،عضو مجموعه های A و B هستند،بنابراین:

$A \cap B \subseteq B$ $\quad\quad$ $A \cap B \subseteq A$

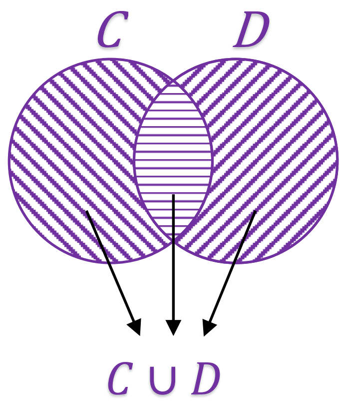
اجتماع دو مجموعه : به دو مجموعه C و D دقت کنید: $D=\{ ۳و۶و۹ \}$ $\quad\quad$ $C=\{ ۲و۴و۶ \}$

عضوهایی که حداقل در یکی از دو مجموعه ی C و D باشند ،عضوهای اجتماع دو مجموعه ی C و D هستند.

$C \cup D = \{ ۲و۳و۴و۶و۹ \}$ $\quad\quad$ ($\cup$ علامت اجتماع)

اجتماع دو مجموعه ی C و D،مجموعه ای است که عضوهای آن یا در C و یا در D و یا در هر دو باشد.(حداقل در یکی از دو مجموعه باشد)

$C \cup D = \{ x \mid x \in C$ یا $x \in D \}$



نکته : با توجه به تعریف اجتماع دو مجموعه داریم:

۱)اجتماع هر مجموعه با مجموعه ی تهی،برابر خود مجموعه است. $A \cup \emptyset = A$

۲)اجتماع هر مجموعه با خودش،خود مجموعه می شود. $A \cup A = A$

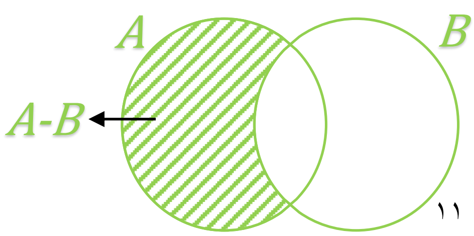
۳) $A \cup B = B \cup A$ (خاصیت جابجایی)

۴)با توجه به نمودار وِن،همه ی اعضای مجموعه های A و B،عضو مجموعه ی $A \cup B$ هستند،بنابراین:

$A \subseteq A \cup B$ $\quad\quad$ $B \subseteq A \cup B$

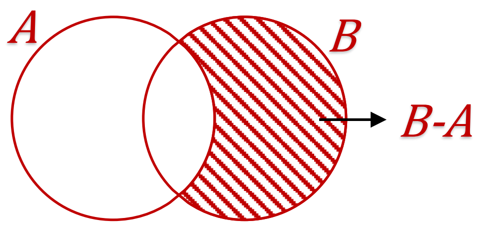
نکته: $A \cap B \subseteq A \cup B$

تفاضل دو مجموعه : مجموعه ی $A - B$ (A منهای B) مجموعه ای است که عضوهای آن در A باشند و در B نباشند. $A - B = \{ x \mid x \in A , x \notin B \}$



و مجموعه ی $B-A$ (B منهای A) مجموعه ای است که عضوهای آن در B باشند و در A نباشند.

$B-A=\{\,x \mid x\in B\ ,\ x\notin A\,\}$



نکته : برای به دست آوردن $A-B$ ، کافی است عضوهای مشترک را از مجموعه ی A حذف کنیم.

مثال : اگر $A=\{$۳و۵و۷و۹$\}$ و $B=\{$۲و۵و۶و۹$\}$ باشد.مجموعه های $A-B$ و $B-A$ را بنویسید.

$A-B=\{$۳و۷$\}$ $\qquad$ $B-A=\{$۲و۶$\}$

نکته : $A-A=\emptyset$ $\qquad$ $\emptyset-A=\emptyset$ $\qquad$ $A-\emptyset=A$

$A-B\subseteq A$ $\qquad$ $B-A\subseteq B$

$A-B\neq B-A$ $\qquad$ $A-B=A-(A\cap B)$

عدد اصلی یک مجموعه : تعداد عضوهای یک مجموعه ی متناهی(باپایان) مانند A ،را عدد اصلی مجموعه ی A می گویند و آن را با $n(A)$ نمایش می دهند. به عنوان مثال اگر مجموعه ی A دارای K عضو باشد،می نویسیم

$n(A)=K$

نکته : چون مجموعه ی تهی هیچ عضوی ندارد، بنابراین $\qquad n(\emptyset)=$۰

نکته : اصل شمول و عدم شمول $\qquad n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

مثال : اگر $A\cap B=\{$۱و۲و۳$\}$ و $n(A)=$۵ و $n(B)=$۷ باشد، $n(A\cup B)$ را بدست آورید .

$n(A\cap B)=$۳

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\Longrightarrow n(A\cup B)=$ ۵ + ۷ − ۳ = ۹

نکته : اگر $A \subseteq B$ باشد،داریم
$$\begin{cases} A \cup B = B \\ A \cap B = A \end{cases}$$

نکته : اگر $A \subseteq B$ باشد،داریم $A - B = \emptyset$

دو مجموعه ی جدا از هم : به دو مجموعه ای که هیچ عضو مشترکی نداشته باشند،دو مجموعه ی جدا از هم گفته می شود.اگر A و B دو مجموعه ی جدا از هم باشند،داریم $A \cap B = \emptyset$

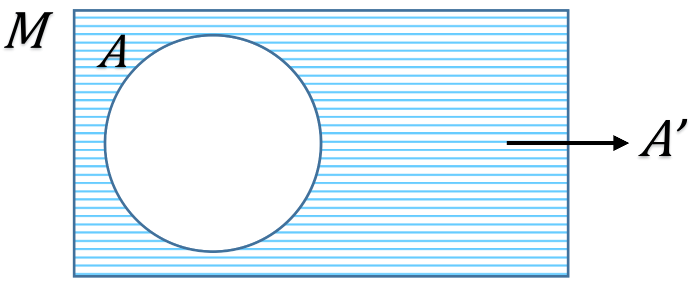
مثال : دو مجموعه ی $A=$ {۱و۳و۵} و $B=$ {۲و۴و۶} دو مجموعه ی جدا از هم هستند.

مجموعه ی مرجع : به مجموعه ای که شامل همه ی مجموعه های مورد نظر باشد، مجموعه ی مرجع یا جهانی گفته می شود و آن را با M نشان می دهند.به طور مثال وقتی از اعداد ۴و۵و۶ صبحت می شود،مجموعه ی مرجع می تواند اعداد طبیعی،اعداد حسابی،اعداد صحیح یا اعداد گویا باشد.

نکته : برای هر مجموعه ی دلخواه مانند A داریم : $A \subseteq M$ $\quad A \cup M = M$ $\quad A \cap M = A$

متمم یک مجموعه : اگر A زیر مجموعه ی مجموعه ی مرجع باشد، A' را متمم مجموعه ی A گوییم که شامل عضوهایی است که در مجموعه ی مرجع باشد ولی این عضوها در مجموعه ی A نباشند.

$$A' = \{ x \mid x \in M , x \notin A \}$$



نکته : $A' = M - A$

مثال : اگر $M=$ {۱و۲و۳و۴و۵} و $A=$ {۳و۴} باشد،متمم مجموعه ی A را با اعضا بنویسید.

$A' =$ {۱و۲و۳و۴و۵} $-$ {۳و۴} $=$ {۱و۲و۵}

نکته : $A \cap A' = \emptyset$ $\quad$ $A \cup A' = M$

بسته بودن یک مجموعه نسبت به یک عمل :

اگر حاصل یک عملیات ریاضی روی هر دو عضو دلخواه از یک مجموعه، باز هم عضوی از آن مجموعه باشد، می گوییم مجموعه نسبت به آن عمل بسته است.

مثال : حاصل جمع و حاصل ضرب هر دو عدد طبیعی،یک عدد طبیعی است،پس مجموعه ی اعداد طبیعی نسبت به جمع و ضرب بسته است.

اما حاصل تفریق و تقسیم هر دو عدد طبیعی،یک عدد طبیعی نیست،پس مجموعه ی اعداد طبیعی نسبت به تفریق و تقسیم بسته نیست.مانند : ۳ − ۷ = −۴ و ۷ ÷ ۲ = ۳/۵

نکته : مجموعه ی اعداد صحیح نسبت به جمع و ضرب و تفریق بسته است اما نسبت به تقسیم بسته نیست،ممکن است حاصل تقسیم دو عدد صحیح،یک عدد صحیح نباشد.

نکته: مجموعه ی اعداد حسابی نسبت به جمع و ضرب بسته است و نسبت به تفریق و تقسیم بسته نیست.

نکته: مجموعه ی اعداد گویا نسبت به جمع و ضرب و تفریق بسته است و نسبت به تقسیم بسته نیست،چون تقسیم بر صفر تعریف نشده است.

نکته:مجموعه $\mathbb{Q} - \{0\}$ **نسبت به چهار عمل اصلی بسته است.**

مجموعه ی توان یک مجموعه :

به مجموعه ای که همه ی اعضای آن زیر مجموعه های یک مجموعه باشد، مجموعه ی توان آن مجموعه می گویند.

مجموعه ی توان A **را با** $P(A)$ **نشان می دهند.**

مثال : اگر $A = \{$۲و۵$\}$ **باشد،** $P(A)$ **را مشخص کنید.**

$P(A) = \{ \emptyset$ و {۲} و {۵} و {۲و۵} }

درس چهارم : مجموعه ها و احتمال

می دانیم احتمال وقوع یک پیشامد از رابطه زیر محاسبه می شود :

$$\text{احتمال رخ دادن یک پیشامد} = \frac{\text{تعداد حالت های مطلوب}}{\text{تعداد حالت های ممکن}}$$

اکنون اگر مجموعه ای که شامل همه ی حالت های ممکن است با S و تعداد این حالت ها را با $n(S)$ و مجموعه ی شامل حالت های مطلوب را با A و تعداد این حالت ها را $n(A)$ و احتمال رخ دادن پیشامد A را با $P(A)$ نمایش دهیم، رابطه مقابل را می توان نوشت : $P(A) = \frac{n(A)}{n(s)}$

☺ **مجموعه ی S را فضای نمونه هم می گویند.**

نکته : احتمال وقوع هر پیشامد عددی از صفر تا یک است. $۰ \leq P(A) \leq ۱$

اگر احتمال وقوع پیشامدی ،صفر باشد، آن پیشامد را نشدنی یا غیر ممکن می گوییم.

اگر احتمال وقوع پیشامدی ،یک باشد ، آن پیشامد را حتمی یا قطعی می گوییم .

پیشامدهای هم شانس : پیشامدهایی که احتمال رخ دادن آنها برابر باشد، پیشامدهای هم شانس نامیده می شوند.

مانند پیشامد رو آمدن سکه(با احتمال $\frac{۱}{۲}$) و دختر بودن نوزاد (با احتمال $\frac{۱}{۲}$)

پیشامدهای تصادفی: اگر S مجموعه ی همه حالتهای ممکن باشد،هر یک از زیر مجموعه های S را یک پیشامد تصادفی می نامیم.

مثال : تاسی را پرتاب کرده ایم، احتمال هر یک از پیشامدهای زیر را بدست آورید.

الف) عدد رو شده مضرب ۳ باشد.(پیشامد A)

ب) عدد رو شده کوچکتر از ۷ باشد. (پیشامد B)

ج) عدد رو شده بزرگتر از ۶ باشد . (پیشامد C)

$S = \{۱و۲و۳و۴و۵و۶\} \Rightarrow n(S) = ۶$

الف) $A = \{۳و۶\} \Rightarrow n(A) = ۲ \Rightarrow P(A) = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$

ب) $B=\{۱و۲و۳و۴و۵و۶\} \Rightarrow n(B)=۶ \Rightarrow P(B)=\frac{۶}{۶}=۱$

ج) پیشامد غیر ممکن $C=\{\ \} \Rightarrow n(C)=۰ \Rightarrow P(C)=\frac{۰}{۶}=۰$

مثال : اگر دو تاس را با هم بیندازیم: چقدر احتمال دارد :

الف) دو عدد رو شده مثل هم باشد.(پیشامد A)

ب) مجموع دو عدد رو شده عدد ۶ باشد(پیشامد B)

ج)تاس اول عدد فرد و تاس دوم عدد کوچکتر از ۳ باشد.(پیشامد C)

هر تاس ۶ حالت دارد پس : $۶\times ۶=۳۶ \Rightarrow n(S)=۳۶$

الف) $A=\{(۱و۱)و(۲و۲)و(۳و۳)و(۴و۴)و(۵و۵)و(۶و۶)\} \Rightarrow n(A)=۶ \Rightarrow P(A)=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$

ب) $B=\{(۱و۵)و(۲و۴)و(۳و۳)و(۴و۲)و(۵و۱)\} \Rightarrow n(B)=۵ \Rightarrow P(B)=\frac{۵}{۳۶}$

ج) $C=\{(۱و۱)و(۳و۱)و(۵و۱)و(۱و۲)و(۳و۲)و(۵و۲)\} \Rightarrow n(C)=۶ \Rightarrow P(C)=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$

گالیله" در ریاضیات آنچه مهم است، فکر کردن است،

ریاضیات الفبایی است که خداوند جهان را بر مبنای آن خلق کرد . "